流体力学第一次作业　(Due 09-13)

1．如课堂所示，矢量的定义如下：

$$x_j' = x_i C_{ij}$$

试证明其反变换如下：

$$x_j = C_{ji} x_i'$$

2．已知 δ_{ij} 为 isotropic tensor，证明在任意旋转坐标系下，有下列关系成立：

$$\delta_{ij}' = \delta_{ij}$$

其中，δ_{ij} 为旧坐标系中 Kronecker Delta 符号，δ'_{ij} 为新坐标系下的符号。

3．验证 epsilon-delta relation

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

4．证明下列关系式：

$\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$

$\varepsilon_{pqr}\epsilon_{pqr} = 6$

$\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{pqj} = 2\delta_{ij}$

5．证明下列矩阵关系式：

$$\mathrm{C} \cdot C^T = C^T \cdot C = \delta$$

其中 C 为课堂中所定义的方向余玄矩阵，δ 为 Keronecker Delta 矩阵。

6．证明二阶张量在任意坐标转换下的三个不变量：

$I_1 = A_{ii}$

$I_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$

$I_3 = \det(A_{ij})$

也请证明

$I_2 = \dfrac{1}{2}\left[I_1^2 - A_{ij}A_{ji}\right]$

$I_3 = A_{ij}A_{jk}A_{ki} - I_1 A_{ij}A_{ji} + I_2 A_{ii}$

提示：请先证明在坐标变换下有$I_1' = A_{ii}' = A_{ii} = I_1$，其它以此类推。