

多层电流片中双撕裂模的耦合*

王传兵 王 水

(中国科学技术大学地球和空间科学系, 合肥 230026)

摘 要

应用边界层理论研究了多层电流片中 $m \geq 2$ 的双撕裂模的耦合发展行为. 在一阶近似下, 解析求得了环位形中撕裂模的外区匹配参数 Δ' , 所得结论对撕裂模的线性和非线性发展均有意义. 结果表明, 两有理面模之间的耦合总是使双撕裂模更不稳定. 耦合的强度不仅与两有理面之间的距离和平衡状态有关, 而且与模在两有理面发展的相对强弱有关. 两有理面相距愈远, 耦合相对愈弱; 发展强的有理面处的模对另一有理面处的模影响更大. 本文用所得结论对双撕裂模的初始非线性发展行为进行了分析. 多层电流片中撕裂模不稳定性引起的自发重联, 可能对太阳耀斑、日冕加热、太阳风和磁层耦合等有重要影响.

关键词 多层电流片, 双撕裂模不稳定性, 磁场重联.

1 引 言

撕裂模不稳定性引起的磁场重联现象在空间等离子体及实验等离子体中具有重要的作用^[1,2]. 一方面, 磁场重联提供了一种将磁能快速转化为等离子体热能和动能的有效机制, 成为解释日冕加热的主要机制之一. 另一方面, 磁场重联同时引起磁场拓扑位形的改变, 这将导致日冕等离子体团的抛射, 磁层亚暴以及实验聚变等离子体中托卡马克的破裂不稳定等现象^[3,4].

Furth 等^[5] 首先系统地研究了单层电流片中的电阻撕裂模不稳定性, 运用奇异边界层理论, 解决了平板位形下的完全本征值问题, 奠定了以后处理不同位形下撕裂模不稳定性的基本思想. Rutherford^[6], White^[7] 等又进一步讨论了撕裂模不稳定性的非线性演化及磁岛宽度的非线性饱和现象. Li Ding^[8] 最近重新研究了撕裂模的非线性增长问题, 利用标准的微扰理论和边界层理论, 建立了撕裂模线性和非线性发展的统一模型, 发现撕裂模存在一个新的更慢的非线性代数增长. 而在真实的空间等离子体中, 多层电流片和磁环是一种较为普遍的现象. 例如, 在太阳冕流结构中就可能存在多层电流片结构^[9]; 在太阳风中也观察到多重日球层电流片结构^[10]. 多层电流片中发生的各种动力学过程以及电流片或磁环之间的相互作用, 对太阳大气和行星际介质物理现象以及太阳风和磁层的相互耦合有着重要影响.

* 国家自然科学基金资助的项目 (19573009).

本文1997年6月9日收到, 1998年4月19日收到修改稿.

Stix^[4]发现当基态磁场存在两个相互靠近的奇异面时,电阻撕裂模的线性增长率将大大增加,在两个奇异面处分别形成磁岛,且当这些奇异面足够靠近时,彼此还会相互驱动. Pritchett等^[11]应用双空间尺度分析方法讨论了双撕裂模的线性性质. Otto和Birk^[12]研究了周期电流片中的电阻撕裂模不稳定性,发现对称模和反对称模均是不稳定的,但反对称模的增长率比对称模的大. Yan等^[13]进一步研究了多层电流片系统中撕裂模不稳定性的非线性特征,发现双撕裂模的非线性演化过程比经典的电阻撕裂模要快的多. 刘一凡等^[14]数值研究了非周期性三层电流片中撕裂模不稳定性引起的自发重联过程,发现这是一种复杂的非稳态重联,磁场的拓扑位形有根本性的改变.

在撕裂模不稳定性的理论解析研究中,大多集中在撕裂模内区方程的求解^[5,15]. 在外区,由于平衡位形的复杂多样,一般都是数值求解外区方程^[16,17],然后再与内区解匹配,较少有解析的显示结果. 最近,Hegna和Callen^[18]对外区方程再次使用边界层理论,求得了适用于不同平衡位形的单撕裂模的外区匹配参数 Δ' 的显示表达式.

本文将采用Hegna和Callen的分析方法,对双撕裂模外区方程的解进行分析. 在一阶近似下,求得双撕裂模的外区匹配参数 Δ'_1 和 Δ'_2 . 文中假设两有理面相距较远,其内区方程仍然满足常 Ψ 近似条件^[5],但在两有理面的常 Ψ 近似值不一样. 求得的结论对模的线性和非线性发展阶段均有意义. 当两有理面的距离相距足够远时,双撕裂模耦合方程自然地回到两单模的独立发展方程.

2 耦合方程

考虑轴对称的环位形,其磁场可写为

$$\mathbf{B}_0 = I(\Psi) \nabla \xi + \nabla \xi \times \nabla \psi, \quad (1)$$

这里 ξ 为环向角, ψ 为磁通函数, $I(\Psi)$ 为磁场的环向分量. 采用磁面坐标,极向角 χ 取为

$$\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \xi}{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \chi} = q(\psi), \quad (2)$$

这里 q 为安全因子,并且假设它具有两个 m/n 有理面(m, n 分别为模的极向和环向模数,参见图1). 坐标的Jacobian简单地选为

$$J = (\nabla \psi \times \nabla \chi \cdot \nabla \xi)^{-1} = \frac{qR^2}{I}, \quad (3)$$

其中 R 为环的大半径.

在太阳日冕磁环、彗星等空间等离子体中等离子体的 β 值一般较小(β 为等离子体静压和磁压的比值),本文采用Hegna和Callen的结果^[18],在不考虑压强效应的条件下($\beta = 0$),撕裂模的外区方程为

$$(m - nq) \left(\frac{I}{q} \frac{\partial}{\partial \Psi} \frac{q}{I} \frac{\partial A}{\partial \Psi} - m^2 \bar{g}^{xx} A \right) - mI \bar{\sigma}' A = 0, \quad (4)$$

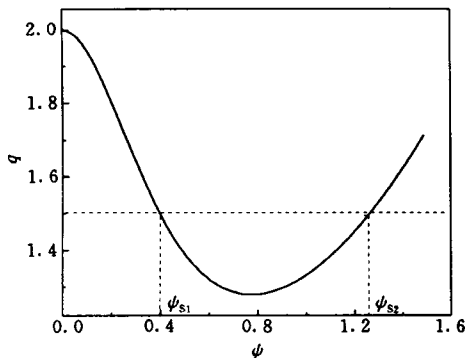


图1 双撕裂模的 q 值随磁面坐标 Ψ 的变化示意图

$$\text{式中 } \bar{g}^{\psi\psi} = \oint (d\chi/2\pi) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad \bar{g}^{xx} = \oint (d\chi/2\pi) \nabla\chi \cdot \nabla\chi, \quad \bar{\sigma}' = \oint (d\chi/2\pi) \bar{\sigma}',$$

$\sigma' = \partial\sigma/\partial\psi$, $\sigma = J \cdot B/B^2$, J 为平衡电流. $\bar{A} = A(\psi) \exp(im\chi - in\xi)$ 为扰动磁通函数.

方程(4)在两个有理面 $m = nq$ 处奇异, 表现为解的一阶导数在奇异层两侧不连续. 在两有理面奇异层内, 当磁岛宽度远小于两有理面距离时, 奇异层较窄, 可采用常 Ψ 近似^[5], 分别求出 A_{S_1} 和 A_{S_2} 的线性和非线性发展的统一发展方程^[8] (A_{S_1} 和 A_{S_2} 分别为 A 在两有理面奇异层的常 Ψ 近似值, 两者不一定相等). 双撕裂模的外区被两有理面 ψ_{S_1} 和 ψ_{S_2} ($\psi_{S_1} < \psi_{S_2}$) 分为三个区域: $0 \leq \psi < \psi_{S_1}$, $\psi_{S_1} < \psi < \psi_{S_2}$ 及 $\psi > \psi_{S_2}$, 求得的本征函数值 A 要求满足边界条件 $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$, 并且在有理面两侧连续.

在外区方程的“外”区, 将 $1/m$ 作为小量 ($m \geq 2$), 展开 A 为 $A = \sum_k (A_k/m^k)$, 可求得 A 的主导行为为^[18]

$$A = c_1 \exp\left(\int d\psi m \sqrt{\bar{g}^{xx}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right) + c_2 \exp\left(-\int d\psi m \sqrt{\bar{g}^{xx}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad (5)$$

c_1, c_2 为待定系数. 代入边界条件 $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$, 有

$$A = c_{M2} \exp\left(\int d\psi m \sqrt{\bar{g}^{xx}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right) + c_{M1} \exp\left(-\int d\psi m \sqrt{\bar{g}^{xx}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad \psi_{S_1} < \psi < \psi_{S_2} \quad (6a)$$

$$A = c_R \exp\left(-\int d\psi m \sqrt{\bar{g}^{xx}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad \psi > \psi_{S_2} \quad (6b)$$

$$A = c_L \exp\left(\int d\psi m \sqrt{\bar{g}^{xx}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad 0 \leq \psi < \psi_{S_1} \quad (6c)$$

其中 c_{M1}, c_{M2}, c_R, c_L 均为待定系数.

这种近似在接近奇异层时失效, 因为对某些 A 值, 方程(4)最后一项将与第二项具有相同量级. 引入弛豫变量 X 及参数 λ

$$X = 2m \left(q - \frac{m}{n} \right) \sqrt{\frac{\bar{g}^{xx}}{\bar{g}^{\psi\psi} q^2}}, \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{-Iq\mu_0 \bar{\sigma}'}{2mq' \sqrt{\bar{g}^{xx} \bar{g}^{\psi\psi}}}, \quad (8)$$

式中根号内的值用有理面的值计算.

在外区方程的“内”区, 外区方程可近似为

$$\frac{d^2 A}{dX^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{X} \right) A = 0, \quad (9)$$

利用式(7)以及图1, 可以判断 X 的符号为 $\psi > \psi_{S_2}$, $X = X_2 > 0$; $\psi < \psi_{S_2}$, $X = X_2 < 0$; $\psi > \psi_{S_1}$, $X = X_1 < 0$; $\psi < \psi_{S_1}$, $X = X_1 > 0$. 在 ψ_{S_1} 有理面附近的符号与单撕裂模的对应符号相

反. 方程 (9) 与“外”区的主导行为 (6) 式匹配的分区解为

$$A_{\text{inner}}^{R+} = A_{S_2} \Gamma(1 + \lambda_2) W_{-\lambda_2/0.5}(X_2), \quad \psi > \psi_{S_2} \quad (10a)$$

$$A_{\text{inner}}^{R-} = A_{S_2} \Gamma(1 - \lambda_2) W_{\lambda_2/0.5}(-X_2) + g \mathcal{R}_{\lambda_2/0.5}(-X_2), \quad \psi < \psi_{S_2} \quad (10b)$$

$$A_{\text{inner}}^{L+} = A_{S_1} \Gamma(1 - \lambda_1) W_{\lambda_1/0.5}(-X_1) + d \mathcal{R}_{\lambda_1/0.5}(-X_1), \quad \psi > \psi_{S_1} \quad (10c)$$

$$A_{\text{inner}}^{L-} = A_{S_1} \Gamma(1 + \lambda_1) W_{-\lambda_1/0.5}(X_1), \quad \psi < \psi_{S_1} \quad (10d)$$

其中已经利用了边界条件 $A(\psi_{S_2}|_{0+}) = A(\psi_{S_2}|_{0-}) = A_{S_2}$, $A(\psi_{S_1}|_{0+}) = A(\psi_{S_1}|_{0-}) = A_{S_1}$ 以及 Witteraker 函数的性质 (A11) 和 (A12). λ_1, λ_2 分别为参数 λ 在两个有理面 ψ_{S_1}, ψ_{S_2} 的值.

将 (6a) 记为

$$A = c_{M_2} \exp\left(\int_{\psi_{S_1}}^{\psi} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right) + c_{M_1} \exp\left(-\int_{\psi_{S_1}}^{\psi} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad \psi > \psi_{S_1} \quad (11a)$$

$$A = c_{M_2} \exp\left(\int_{\psi_{S_1}}^{\psi_{S_2}} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right) \exp\left(\int_{\psi_{S_2}}^{\psi} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right) + c_{M_1} \exp\left(-\int_{\psi_{S_1}}^{\psi_{S_2}} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right) \exp\left(-\int_{\psi_{S_2}}^{\psi} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad \psi < \psi_{S_2} \quad (11b)$$

考虑 Witteraker 函数的积分表示 (A7) 和 (A8), 将 (10b), (10c) 分别与 (11a), (11b) 渐近匹配, 并认为方程 (9) 的第一项和第二项量级相当即 $|X| = 4\lambda$ 时, “外”解和“内”解达到匹配. 有

$$A_{S_1} \Gamma(1 - \lambda_1) W_{\lambda_1/0.5}(4\lambda_1) = c_{M_1} \exp(-2\lambda_1), \quad (12a)$$

$$d \mathcal{R}_{\lambda_1/0.5}(4\lambda_1) = c_{M_2} \exp(2\lambda_1), \quad (12b)$$

$$A_{S_2} \Gamma(1 + \lambda_2) W_{\lambda_2/0.5}(4\lambda_2) = c_{M_1} h^{-1} \exp(-2\lambda_2), \quad (12c)$$

$$g \mathcal{R}_{\lambda_2/0.5}(4\lambda_2) = c_{M_2} h \exp(2\lambda_2), \quad (12d)$$

式中

$$h = \exp\left(-\int_{\psi_{S_1}}^{\psi_{S_2}} d\psi m \sqrt{\bar{g}^{XX}/\bar{g}^{\psi\psi}}\right), \quad (13)$$

对有限磁岛宽度 w , 外区的匹配参数为

$$\begin{aligned} \Delta'(w) &= \frac{1}{A(r_s)} \left(\frac{dA}{dr}(r_s + w) - \frac{dA}{dr}(r_s - w) \right) \\ &= 2m \sqrt{\bar{g}^{XX}} \frac{1}{A(r_s)} \left(\frac{dA}{dX}(\bar{w}) \Big|_{0+} - \frac{dA}{dX}(\bar{w}) \Big|_{0-} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\bar{w} = 2m \sqrt{\bar{g}^{XX}} w$ 为归一化的磁岛宽度. 由 (12) 式求出各系数常数, 再将 (10) 式代入 (14) 式得到双撕裂模在两有理面的外区匹配参数分别为

$$\Delta'_1(\bar{w}_1) = \Delta'_{10}(\bar{w}_1) + h \frac{A_{S_2}}{A_{S_1}} \Delta'_{12}(\bar{w}_1), \quad (15)$$

$$\Delta'_2(\bar{w}_2) = \Delta'_{20}(\bar{w}_2) + h \frac{A_{S1}}{A_{S2}} \Delta'_{21}(\bar{w}_2), \quad (16)$$

其中各参量定义为

$$\Delta'_{i0}(\bar{w}_i) = 2m\sqrt{g^{zx}} [\Gamma(1 + \lambda_i)I_{-\lambda_i}(\bar{w}_i) + \Gamma(1 - \lambda_i)I_{\lambda_i}(\bar{w}_i)], \quad (i = 1, 2) \quad (17a)$$

$$\Delta'_{ij}(\bar{w}_i) = 2m\sqrt{g^{zx}} \frac{\Gamma(1 - \lambda_j)W_{\lambda_j/0.5}(4\lambda_j)\exp(2\lambda_j)}{\mathcal{R}_{\lambda_j/0.5}(4\lambda_j)\exp(-2\lambda_j)} K_{\lambda_i}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (17b)$$

$\sqrt{g^{zx}}$ 的值为在与 Δ' 对应的有理面处的计算值, Γ 为 gamma 函数, 及

$$I_{\lambda}(\bar{w}) = -\frac{1}{2}W_{\lambda/0.5}(\bar{w}) + \frac{\lambda}{\bar{w}} [W_{\lambda/0.5}(\bar{w}) - (1 - \lambda)W_{\lambda-1/0.5}(\bar{w})], \quad (17c)$$

$$I_{-\lambda}(\bar{w}) = -\frac{1}{2}W_{-\lambda/0.5}(\bar{w}) - \frac{\lambda}{\bar{w}} [W_{-\lambda/0.5}(\bar{w}) - (1 + \lambda)W_{-\lambda-1/0.5}(\bar{w})], \quad (17d)$$

$$K_{\lambda}(\bar{w}) = -\frac{1}{2}\mathcal{R}_{\lambda/0.5}(\bar{w}) + \frac{1}{\bar{w}} [(1 - \lambda)\mathcal{R}_{\lambda-1/0.5}(\bar{w}) + \lambda\mathcal{R}_{\lambda/0.5}(\bar{w})], \quad (17e)$$

方程(15)、(16)构成了双撕裂模两模之间通过外区的耦合关系, 方程第一项为非耦合项, 等于单模的计算结果, 第二项为耦合项。

3 分析与讨论

在双撕裂模的两有理面模之间通过外区的耦合关系(15)和(16)式中, 耦合项包含两个明显的耦合参数. 其一为 h , 是一积分表示式, 与平衡时两有理面之间区域的平衡状态及两有理面的距离有关. 在柱位形条件下, $h = r_{S1}/r_{S2}$, 这里 r_{S1} 、 r_{S2} ($> r_{S1}$) 分别为两有理面的径向坐标. 当两有理面的距离相距很远时, $h \rightarrow 0$, $\Delta'_i(\bar{w}_i) = \Delta'_{i0}(\bar{w}_i)$ 双撕裂模退回到不考虑耦合的两个单撕裂模(参见图2). 另一耦合参数为双撕裂模在两有理面内区的常 ψ 近似值的比值. 当 $A_{S2} \gg A_{S1}$ 时, 方程(15)中的第二项作用显著, 即在有理面 ψ_{S2} 的模对在有理面 ψ_{S1} 的模具有显著影响, 而在有理面 ψ_{S1} 的模对在有理面 ψ_{S2} 的模的影响则很小. 反之亦然. 总之, 双撕裂模中两有理面模的耦合程度不仅与两有理面之间的距离和平衡状态有关, 而且与模在两有理面发展的相对强弱有关.

首先, 根据上面的耦合关系, 我们可以简单地分析双撕裂模的初始线性发展情况. (15)和(16)式中令 $\bar{w}_1 \rightarrow 0$, $\bar{w}_2 \rightarrow 0$, 并利用附录中的公式(A11)和(A12)有

$$\Delta'_1 = -2m\sqrt{g^{zx}} \lambda_1 \pi \cot(\lambda_1 \pi) + 2m\sqrt{g^{zx}} J_{12} h \frac{A_{S2}}{A_{S1}}, \quad (18)$$

$$\Delta'_2 = -2m\sqrt{g^{zx}} \lambda_2 \pi \cot(\lambda_2 \pi) + 2m\sqrt{g^{zx}} J_{21} h \frac{A_{S1}}{A_{S2}}, \quad (19)$$

$$J_{ij} = \Gamma(1 - \lambda_j)W_{\lambda_j/0.5}(4\lambda_j)\exp(2\lambda_j) [\mathcal{R}_{\lambda_j/0.5}(4\lambda_j)\exp(-2\lambda_j)]^{-1}, \quad (20)$$

第一项等同于文献[18]中单模的计算结果, 第二项为两模的耦合作用. 显然, 耦合项恒大于零, 即耦合总是使双撕裂模相对单撕裂模更不稳定. 对单撕裂模, 当 $\lambda > 0.5$ 时, 模由稳

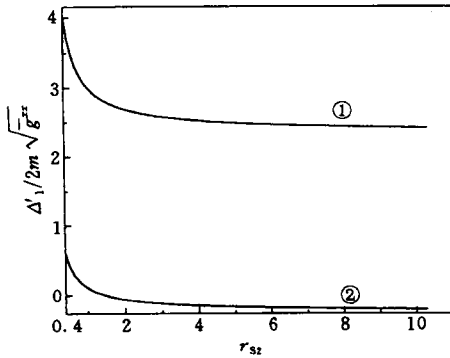


图 2 外区匹配参数 $\Delta'_1/2m\sqrt{g^{xx}}$ 在柱位形下随耦合参数 $h = r_{s1}/r_{s2}$ 的变化

($r_{s1} = 0.2, \lambda_2 = 0.6, A_{s2}/A_{s1} = 2.5$, 曲线①对应 $\lambda_1 = 0.75$, 曲线②对应 $\lambda_1 = 0.45$.)

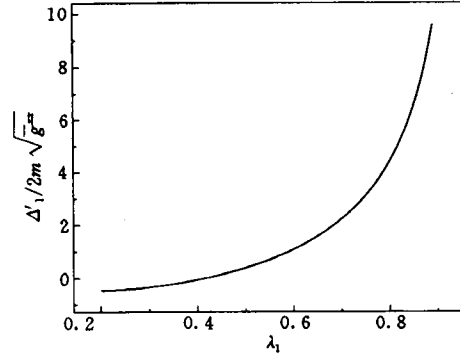


图 3 外区匹配参数 $\Delta'_1/2m\sqrt{g^{xx}}$ 随耦合参数 λ_1 的变化

($h = 0.5, \lambda_2 = 0.7, A_{s2}/A_{s1} = 1.0$, 当 $\lambda_1 \approx 0.415$ 时, 模由稳定变为不稳定.)

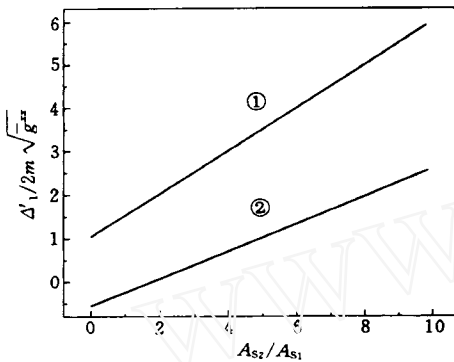


图 4 外区匹配参数 $\Delta'_1/2m\sqrt{g^{xx}}$ 随耦合参数 A_{s2}/A_{s1} 的变化

($h = 0.5, \lambda_2 = 0.6$, 曲线①对应 $\lambda_1 = 0.65$, 模恒不稳定; 曲线②对应 $\lambda_1 = 0.35$, 随 A_{s2}/A_{s1} 增加, 模由稳定变为不稳定.)

定变为不稳定. 而对双撕裂模, 由于两有理面模之间的耦合作用, 模不稳定的域值将前移, 当 $\lambda < 0.5$ 时, 双撕裂模仍可能被激发为不稳定(参见图3).

假设初始时刻, 在有理面(或奇异面) A_{s2} 处的模 A_{s2} 不稳定, 但在有理面(或奇异面) A_{s1} 处的模 A_{s1} 稳定, 且两有理面相距不是很远. 随着 A_{s2} 模的不断发展, A_{s2}/A_{s1} 将不断增加, 耦合对 A_{s1} 模的影响也随之逐渐增强. 当 A_{s2}/A_{s1} 增加到一定值时, 有可能使 $\Delta'_1 > 0$, 模 A_{s1} 被激发为不稳定(参见图4). 模 A_{s1} 被激发为不稳定后, A_{s1}/A_{s2} 又可能增加, 耦合对模 A_{s2} 的影响加强, 从而 A_{s1} 模反过来促进模 A_{s2} 的发展. 这与 Stix^[4] 的定性分析是一致的.

其次, (15)和(16)式与文献[8]中的(62)式一起, 两者比较完整地组成了双撕裂模的初始非线性发展方程. 整个耦合方程很复杂, 这里可以考虑一种简单的极限情况.

设 $A_{s2} \gg A_{s1}$, 式(15)中的耦合项占主导行为, 而(16)式中的耦合项可以忽略, $\Delta'_1(\bar{w}_1) \sim (A_{s2}/A_{s1})h\Delta'_{12}(\bar{w}_1), \Delta'_2(\bar{w}_2) \sim \Delta'_{20}(\bar{w}_2)$, 两模均在非线性发展阶段. 文献[8]中两模内区方程(62)式简化为

$$\left(\frac{\partial A_{s1}}{\partial t}\right)^2 + b_1 \Delta_1'^2 A_{s1} \frac{\partial A_{s1}}{\partial t} = c_1 \Delta_1'^2 A_{s1}, \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial A_{s2}}{\partial t}\right)^2 + b_2 \Delta_2'^2 A_{s2} \frac{\partial A_{s2}}{\partial t} = c_2 \Delta_2'^2 A_{s2}, \tag{22}$$

其中 b_1, b_2, c_1, c_2 , 为与 A 无关的常数, 左边第一项为 Rutherford 项(对应模线性弱不稳定),

第二项为新非线性项(对应模线性强不稳定)^[8]. 下面分两种情况进行讨论.

1. A_{S2} 线性弱不稳定, Rutherford 行为占优势, 则

$$\frac{\partial A_{S2}}{\partial t} \approx c_2^{1/2} \Delta'_{20} A_{S2}^{1/2}, \quad (23)$$

由此有 $A_{S2} \sim t^2$, 令 $A_{S2} \sim \alpha^2 t^2$ 代入(20)式有

$$\left(\frac{\partial A_{S1}}{\partial t} \right)^2 + b_1 \Delta'_{12}{}^2 \alpha^2 \frac{t^4}{A_{S1}} \frac{\partial A_{S1}}{\partial t} = c_1 \Delta'_{12}{}^2 \alpha^2 \frac{t^4}{A_{S1}}, \quad (24)$$

同样, 对 A_{S1} 模如果 Rutherford 行为占优势, 可得 $A_{S1} \sim t^2$; 若新非线性行为占优势, 有 $A_{S1} \sim t$. 考虑耦合与不考虑耦合比较, 模随时间发展的趋势基本一样.

2. A_{S2} 线性强不稳定, 新非线性行为占优势, 则有 $A_{S2} \sim t$. A_{S1} 模线性弱不稳定, Rutherford 行为占优势时, $A_{S1} \sim t^{4/3}$. 考虑耦合与不考虑耦合比较, A_{S1} 模由以 t^2 代数增长变为以 $t^{4/3}$ 代数增长. 对于一般情况, 需要数值求解耦合方程得到双撕裂模随时间发展的一般行为.

4 结 论

本文在轴对称的环几何位形下, 解析研究了多层电流片中 $m \geq 2$ 的双撕裂模的耦合发展行为. 通过对外区方程再次采用边界层理论, 在一阶近似下求得双撕裂模在两个有理面(或奇异面)的外区匹配参数 Δ'_1 和 Δ'_2 的耦合方程. 所得结论适用于不同平衡位形, 对双撕裂模的线性和非线性发展均有意义. 通过对耦合方程的分析, 可以得到以下基本结论.

1. 双撕裂模两有理面模之间的耦合强弱不仅与两有理面之间的平衡状态和距离有关, 而且与两模发展的相对强弱有关. 当两有理面的距离相距很远时, 双撕裂模的色散关系自然回到两单撕裂模的色散关系.

2. 双撕裂模两有理面模之间的耦合作用总是使双撕裂模更不稳定.

3. 双撕裂模各有有理面模不稳定的域值条件相对单撕裂模要宽. 当单撕裂模稳定时, 双撕裂模仍可能不稳定. 并且通过耦合作用, 不稳定的有理面模的发展可能将原来稳定的另一有理面处的模激发为不稳定. 而被激发的模反过来又能促进原来不稳定的模的发展.

4. 对两有理面模的非线性发展阶段的简单分析表明, 耦合作用能显著地改变模随时间发展的非线性趋势, 如由以 t 增长变为以 $t^{4/3}$ 增长.

虽然文中数学处理只取了 A 的一阶近似, 并且外区方程的“外”解和“内”解的匹配方式也略显粗糙, 但所得基本结论与物理分析是一致的. 更完整的分析需要 A 的高阶近似以及采用更好的匹配方式. 另外, 本文采用的方法原则上可以推广到三层和三层以上电流片之间的耦合作用. 对等离子体 β 不为零的情形, 我们将在另文进行讨论.

感谢中国科学技术大学近代物理系李定教授的有益讨论和建议.

附 录 (Wittaker 函数的性质)

在本附录中,我们列出文中用到的文献(19)和(20)中 Wittaker 函数的一些基本性质. Wittaker 函数为下面微分方程的解.

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) u = 0, \quad (A1)$$

这里 λ, μ 为常数, z 为复变量. 方程(A1)有两个线性无关的解

$$M_{\lambda/\mu}(z) = z^{\mu+0.5} e^{-z/2} F(\mu - \lambda + 0.5, 2\mu + 1, z), \quad (A2)$$

$$M_{\lambda/-\mu}(z) = z^{-\mu+0.5} e^{-z/2} F(-\mu - \lambda + 0.5, -2\mu + 1, z), \quad (A3)$$

其中

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad (A4)$$

为合流超几何函数. 当 $2\mu = \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 上述幂级数发散, 解(A2)和(A3)不再适用. 对此不同的作者引入了不同的函数作为方程(A1)的解. Wittaker 引入 Wittaker 函数, 其表达式为

$$W_{\lambda/\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2 - \mu - \lambda)} M_{\lambda/\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - \lambda)} M_{\lambda/-\mu}(z), \quad (A5)$$

Buchholz 引入函数

$$\mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+2\mu)} M_{\lambda/\mu}(z), \quad (A6)$$

这里 Γ 为 gamma 函数. 函数 $W_{\lambda/\mu}(z)$, $W_{-\lambda/\mu}(-z)$ 及 $\mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z)$, $\mathcal{R}_{-\lambda/\mu}(-z)$ 均为方程(A1)的解. 本文当 $z > 0$ 时, 取 $W_{\lambda/\mu}(z)$, $\mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z)$ 为方程(A1)的两个线性无关的解; 当 $z < 0$ 时, 取 $W_{-\lambda/\mu}(-z)$, $\mathcal{R}_{-\lambda/\mu}(-z)$ 为方程(A1)的两个线性无关的解.

Wittaker 函数 $W_{\lambda/\mu}(z)$, $\mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z)$ 可用积分表示为

$$W_{\lambda/\mu}(z) = \frac{e^{-z/2} z^{1/2-\mu}}{\Gamma(1/2 - \lambda + \mu)} \times \int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-1} \left(1 + \frac{z}{\mu} \right)^{\lambda+\mu-1/2} dt, \quad (A7)$$

(|arg z| < π , $\text{Re}(\mu - \lambda) > -1/2$)

$$\mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1/2 + \mu + \lambda) \Gamma(1/2 + \mu - \lambda)} e^{\frac{z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-zt} t^{2\mu-1} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}} dt, \quad (A8)$$

($\text{Re}(1/2 + \mu \pm \lambda) > 0$, |arg z| < π)

并且有

$$z \frac{d\mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z)}{dz} = \left(\frac{z}{2} - \lambda \right) \mathcal{R}_{\lambda/\mu}(z) - \left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda \right) \mathcal{R}_{\lambda-1/\mu}(z), \quad (A9)$$

($\text{Re}(\mu \pm \lambda \mp 1/2) > 0$, |arg z| < π)

$$z \frac{dW_{\lambda/\mu}}{dz} = \left(\lambda - \frac{z}{2} \right) W_{\lambda/\mu} - \left[\mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W_{\lambda-1/\mu}, \quad |arg z| < \pi \quad (A10)$$

当 z 较小时

$$\mathcal{R}_{\lambda/0.5}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z \left(1 + \frac{1-\lambda}{2!} z + \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)}{3!} \frac{z^2}{2!} + \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)}{4!} \frac{z^2}{3!} + \dots \right),$$

$$(\operatorname{Re}(1 \pm \lambda) > 0, \quad |\arg z| < \pi) \quad (\text{A11})$$

$$W_{\lambda/\mu}(z) = \frac{\exp(-z/2)}{\Gamma(1-\lambda)} \left(1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda z^{p+1}}{p!(1+p)!} \frac{\Gamma(1-\lambda+p)}{\Gamma(1-\lambda)} [\Psi(1+p) + \Psi(2+p) - \Psi(1-\lambda+p) - \ln z] \right), \quad |\arg z| < \frac{3}{2} \pi \quad (\text{A12})$$

其中 $\Psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$ 为 digamma-psi 函数, 其具有如下性质 $\Psi(1+z) = \Psi(z) + 1/z$, 及 $\Psi(1-z) = \Psi(z) + \pi \cot(\pi z)$.

参 考 文 献

- 1 王 水. 太阳等离子体中的磁场重联. 见: 汪克林编. 近代物理学展望. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1993, 第二卷, 1—54
- 2 Klimchuk A, Porter L J. Scaling of heating rates in solar coronal loops. *Nature*, 1995, 377(6546):131—133
- 3 Priest E R. The magnetohydrodynamics of current sheets. *Rep. Prog. Phys.*, 1985, 48(7):955—1090
- 4 Súx T H. Current penetration and plasma disruption. *Phys. Rev. Lett.*, 1976, 36(10):521—524
- 5 Furth H P, Killeen J, Rosenbluth M N. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch. *Phys. Fluids*, 1963, 6(4):459—484
- 6 Rutherford P H. Nonlinear growth of the tearing mode. *Phys. Fluids*, 1973, 16(11):1903—1908
- 7 White R B, Monticello D A. Saturation of the tearing mode. *Phys. Fluids*, 1977, 20(5):800—805
- 8 Li Ding. A new algebraic growth of nonlinear tearing mode. *Phys. Plasmas*, 1995, 2(8):3275—3281
- 9 Eddy J A. Observation of a possible neutral sheet in the corona. *Solar. Phys.*, 1973, 30(2):385—394
- 10 Crooker N V, Siscoe G L, et al. Multiple heliospheric current sheets and coronal streamer belt dynamics. *J. Geophys. Res.*, 1993, 98(A6):9371—9381
- 11 Prichett P L, Lee Y C, Drake J K. Linear analysis of the double tearing mode. *Phys. Fluids*, 1980, 23(7):1368—1374
- 12 Otto A, Birk G T. Resistive instability of periodic current sheets. *Phys. Fluids*, 1992, B4(11):3811—3813
- 13 Yan M, Otto A, Muzzell D, et al. Tearing mode instability in a multiple current sheet system. *J. Geophys. Res.*, 1994, 99(A5):8657—8669
- 14 刘一凡, 郑惠南, 王 水. 多层电流片中撕裂模不稳定性数值研究. 地球物理学报, 1997, 40(2):145—153
- 15 Drake J F, Lee Y C. Kinetic theory of tearing instabilities. *Phys. Fluids*, 1977, 20(8):1134—1353
- 16 Furth H P, Rutherford P H, Solberg H. Tearing mode in the cylindrical tokamak. *Phys. Fluids*, 1973, 16(7):1064—1063
- 17 Carreras B, Hicks H R, Waddell B V. Tearing mode activity for hollow current profiles. *Nucl. Fusion*, 1979, 19(5):583—596
- 18 Hegna C C, Callen J D. Stability of the tearing mode in tokamak plasma. *Phys. Plasmas*, 1995, 1(7):2308—2318
- 19 Magnus W, Oberhettinger F, Sonic R P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. New York: Springer-Verlag, 1966, 262—323
- 20 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Tables of integrals, Series, and Products. Orlando: Academic, 1980. 1059—1063

COUPLING OF DOUBLE TEARING MODE IN A MULTIPLE CURRENT SHEET

WANG CHUAN-BING WANG SHUI

(*Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of
China, Hefei 230026, China*)

Abstract

A boundary theory is used to study the coupling behavior of double resistive tearing mode in a multiple current layer. Simple analytic expresses for the tearing instability parameter Δ' are obtained under the first leading order, which are applicable for both linear and nonlinear development of the double tearing mode. The results show that the coupling of the two rational surface modes always contributes a destabilizing effect to the double tearing mode. The strength of the coupling relates not only to the distance and initial status between the two rational surfaces, but also to the relative developing strength of the two rational surface modes. More far away of the two rational surfaces is, weaker of the coupling strength becomes; and the weaker rational surface mode is effected more heavily by the other stronger rational surface mode. The initial nonlinear developing tendency of the double tearing mode is also investigated by using the coupling equations. The spontaneous reconnection caused by tearing mode instability in the multiple current sheet may be important for solar flare, corona heating and the coupling between the solar wind and the magnetosphere.

Key words Multiple current sheet, Double tearing mode, Magnetic reconnection.

作者简介 王传兵,男,1970年生,1992年毕业于天津大学物理系,1995年在中国科学院等离子体物理研究所获硕士学位,现在中国科学技术大学空间物理专业攻读博士。研究方向为空间等离子体物理。